Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato VI

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si trovino il massimo e il minimo limite delle successioni seguenti.

$$\circ \frac{1+(-1)^n n}{1+n}:$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^n n}{1+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n}{1+n} = 1.$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^n n}{1+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{1+n} = -1.$$

$$\circ - (-1)^n \frac{2n}{n+2}:$$

$$\limsup_{n\to+\infty} -(-1)^n \frac{2n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+2} = 2$$

$$\liminf_{n\to+\infty} -(-1)^n \frac{2n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2n}{n+2} = -2$$

$$\circ 1+\sin n:$$

$$\limsup_{n\to+\infty} 1+\sin n = \lim_{n\to+\infty} 1+1 = 2$$

$$\liminf_{n\to+\infty} 1+\sin n = \lim_{n\to+\infty} 1-1 = 0.$$

$$\circ \frac{n^2+3n+2}{5n^2-4}:$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+2}{5n^2-4} = \liminf_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+2}{5n^2-4} = \frac{1}{5}$$

$$\circ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}:$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} + \frac{1-1}{2} = 0$$

$$\circ \frac{n^{2/3}\sin n!}{n+1}:$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{n^{2/3}\sin n!}{n+1} = \liminf_{n\to+\infty} \frac{n^{2/3}\sin n!}{n+1} = 0$$

$$\circ \frac{n!}{2^n} \sin n\frac{\pi}{2} :$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} \sin n\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} \sin n\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n!}{2^n} = -\infty$$

<u>Esercizio 2.</u> Si studi la convergenza delle seguenti serie usando gli opportuni criteri.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} :$$

Usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Dunque la serie converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} :$$

Usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2+6n+2}{(n+1)^2} = 4.$$

Dunque la serie diverge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} :$$

Applichiamo il criterio del confronto, avendo che per $n \geq 3 \quad \frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} > +\infty.$$

Dunque la serie diverge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} :$$

Usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}.$$

Dunque la serie converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}} :$$

Usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{n/2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{2}}}=0.$$

$$\bullet\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}:$$

La serie si può scrivere anche come:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Questa è la somma di due serie geometriche di ragione minore di 1. Dunque queste serie convergono e di conseguenza converge anche la nostra serie di partenza.

$$\bullet\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}:$$

Usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+2n+1}=0.$$

Dunque la serie converge.

<u>Esercizio 3.</u> Si provi, fornendo un adeguato esempio, che in generale si ha:

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\leq\limsup_{n\to+\infty}a_n+\limsup_{n\to+\infty}b_n$$

Basta scegliere $a_n=1+(-1)^n$ e $b_n=1-(-1)^n$. Vediamo infatti che:

$$\limsup_{n\to+\infty}a_n=2\quad\limsup_{n\to+\infty}b_n=2$$

Ma:

$$\limsup_{n\to+\infty}a_n+b_n=2\leq 4=\limsup_{n\to+\infty}a_n+\limsup_{n\to+\infty}b_n.$$

<u>Esercizio 4.</u> Dire per quali $x\in\mathbb{R}$ le seguenti serie convergono:

$$\bullet\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{n^2x}{n+x^2}}$$

Per $x\leq 0$ la condizione necessaria non è verificata, quindi la serie non converge. Applichiamo invece il criterio della radice per $x>0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{e^{\frac{n^2x}{n+x^2}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{n^2x}{n^2+nx^2}}}=\frac{1}{e^x}<1\qquad\forall x>0$$

Per cui la serie converge $\forall x>0$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{n^2 x}}$$

Per $x \leq 0$ la condizione necessaria non è verificata, quindi la serie non converge. Applichiamo invece il criterio della radice per $x > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+e^{n^2 x}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{nx}\sqrt[n]{\frac{1}{e^{n^2 x}}+1}} = 0 \qquad \forall x > 0.$$

Dunque, la serie converge $\forall x > 0$.

<u>Esercizio 5.</u> Si dica per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $\{a_n\}$ definìta da:

$$a_n = \frac{(\sin n)\log(5+e^{2n})}{n^\alpha}$$

i) è limitata;
ii) ammette limite. Vediamo che:

$$\Big|\frac{\sin n \log(5+e^2 n)}{n^\alpha}\Big| \leq \frac{\log(5+e^{2n})}{n^\alpha} \approx \frac{\log e^{2n}}{n^\alpha} = \frac{2n}{n^\alpha} = \frac{2}{n^{\alpha-1}}$$

Dunque la successione è limitata per $\alpha > 1$. Per gli stessi valori di α essa ammette anche limite, poiché coincidono il limite superiore e inferiore.

<u>Esercizio 6.</u> Determinare il limite della seguente successione a_n definita per ricorrenza come:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}), \qquad a_0 > \sqrt{3}$$

Se $a_n > \sqrt{3}$ abbiamo che $a_{n+1} > \sqrt{3}$, essendo quest'ultima equivalente a $\dfrac{(a_n-\sqrt{3})^2}{a_n} > 0$. Poiché $a_0 > \sqrt{3}$, per induzione otteniamo che $a_n > \sqrt{3}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che equivale ad avere $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dalla decrescenza di a_n segue che esiste finito $l = \lim_{n\to+\infty} a_n \geq \sqrt{3}$. Poiché l deve soddisfare la condizione limite $l = \dfrac{1}{2}(l + \dfrac{3}{l})$, otteniamo $l = \sqrt{3}$.